



Olimpiada de Matematică – etapa locală - Galați

13 februarie 2010

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât $\forall x, y \in A, x \cdot (y^2 - y) = (y^2 - y) \cdot x$.

Să se demonstreze că inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ.

Visilina Guiță, profesor, Galați

Problema 2. Fie (G, \cdot) un subgrup al grupului multiplicativ (\mathbb{R}^*, \cdot) și F mulțimea funcțiilor

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile și surjective care satisfac condiția $(\forall) x \in \mathbb{R}, f'(x) \in G$. Să se demonstreze că mulțimea F în raport cu operația de compunere a funcțiilor este grup.

Marian Baroni, profesor, Galați

Problema 3. Se consideră $I_n = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} dx, x \in \mathbb{R}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1 și I_2 .

b) Să se calculeze $I_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 4. Fie șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ definite astfel:

$$a_n = \int_0^1 x^n \cdot \ln(x+1) \cdot dx, \quad b_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Vasile Popa, profesor, Galați

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.